

Método de Elementos Finitos hp con Adaptabilidad Automática Orientada a un Objetivo para Problemas Abiertos en $2D$

I. Gómez Revuelto⁽¹⁾, L. E. García Castillo⁽²⁾, D. García Doñoro⁽²⁾

Email: igomez@diac.upm.es, luise@tsc.uc3m.es

⁽¹⁾ Departamento de Ingeniería Audiovisual y Comunicaciones. Universidad Politécnica de Madrid

⁽²⁾ Departamento de Teoría de Señal y Comunicaciones. Universidad Carlos III de Madrid

Abstract—In this paper, we describe a fully automatic goal-oriented hp -adaptive Finite Element strategy, which is applied to open problems (radiation and scattering). The methodology produces exponential convergence rates in terms of an upper bound of an user-prescribed quantity of interest (in our case, the S-parameter, the far radiated field or far scattering field) against the problem size (number of degrees of freedom). We illustrate the efficiency of the method with $2D$ numerical simulations of open problems (radiation and scattering). Applications include the far scattering (radiated) field by an object (antenna) and the computation of mutual coupling of the antennas (S-parameters). Results show that self-adaptive goal-oriented hp obtains more accuracy in the quantity of interest than self-adaptive energy-norm hp with the same number of degrees of freedom.

I. INTRODUCCIÓN

El Método de Elementos Finitos, *Finite Element Method* (FEM), es un método numérico muy versátil que tiene la posibilidad de generar mallas que se adaptan no solo a la geometría del problema sino también a la solución del problema. Hay varios tipos de adaptabilidad (véase por ejemplo, [1]), siendo la más potente la adaptabilidad hp [2] en la que se realizan refinamientos simultáneos en h (se modifica el tamaño de los elementos) y en p (se varía el orden de aproximación polinomial p de cada elemento). De esta manera, se obtienen velocidades de convergencia exponenciales, incluso en presencia de singularidades, mientras que con adaptabilidad en h o en p el tipo de convergencia que se obtiene es (de forma general) algebraica. Así pues, se pueden obtener soluciones muy precisas aun en presencia de singularidades, o, de forma equivalente, soluciones con un grado de precisión prefijado con un mínimo número de incógnitas.

La implementación de la adaptabilidad hp para problemas abiertos empleando un FEM iterativo (FE-IIIEE, *Finite Element-Iterative Integral Equation Evaluation*) se ha descrito en [3]. Es importante destacar que la velocidad de convergencia exponencial obtenida en [3] se mide en la norma de la energía del error en el dominio FEM con respecto al número de incógnitas. Así pues, los campos electromagnéticos se pueden conocer con la precisión deseada dentro del dominio FEM. Esto puede ser utilizado para encontrar aquellas posiciones donde el ajuste de las características de dispersión o radiación de un objetos sea más eficaz, estimar la reactancia de entrada de una antena, encontrar lugares sensibles a que se produzca puntos calientes o el efecto *multipactor* en antenas,... Sin embargo, un ingeniero de telecomunicaciones

está principalmente interesado en conocer con la precisión deseada la sección radar de un objeto, el diagrama de radiación y el coeficiente de reflexión de una antena y la matriz de impedancias mutuas de los elementos que forman una agrupación. Con este criterio debemos adaptar nuestro método numérico para que obtenga con la exactitud requerida el parámetro deseado a expensas de la exactitud de la solución en el resto del dominio¹. Al mismo tiempo es deseable mantener la convergencia exponencial que presenta el método descrito en [3].

En este artículo se completa la adaptabilidad automática hp -FEM presentada en [3] para problemas abiertos con el objetivo minimizar la norma de la energía de la función error en el dominio FEM con otra adaptabilidad automática hp -FEM orientada a minimizar la cota superior de una cantidad de interés. La adaptabilidad automática hp orientada a objetivo se ha presentado en [4] en el contexto de problemas cerrados de guíaondas. En este artículo se amplía al análisis de problemas abiertos usando como cantidad de interés el cálculo del coeficiente de reflexión de una antena, el coeficiente de acoplamiento entre elementos de un array y los campos lejanos (dispersos o radiados) por una estructura. Este método mantiene la convergencia exponencial en un cota superior de la cantidad de interés con respecto al tamaño del problema (número de incógnitas).

II. ADAPTABILIDAD ORIENTADA A OBJETIVO

El algoritmo presentado en esta sección es una extensión de la adaptabilidad hp -FEM basado en la minimización de la norma de la energía del error en el dominio FEM presentado en [3].

Dado un problema, una cantidad de interés y una precisión deseada para esta cantidad de interés, el objetivo de la adaptabilidad automática orientada a objetivo es generar, sin la intervención del usuario, una secuencia de mallas hp en la que la última malla obtenida proporciona un error inferior a la tolerancia prescrita en la cantidad de interés con el mínimo número de incógnitas.

La ecuación de Helmholtz junto a las apropiadas condiciones de contorno determinan la solución de los problemas de $2D$ con simetría de traslación, véase [3]. Para resolver

¹Por ejemplo, puede no ser necesario computar con precisión alguna de las singularidades del campo electromagnético en un objeto para calcular con precisión la sección radar que presenta en una determinada dirección

TABLE I
RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES (3) Y (4) Y
LOS PARÁMETROS FÍSICOS DEL PROBLEMA REAL

Pol.	ϕ	f_r	g_r	q	ϕ^0
TM	E_z	μ_r	ε_r	$jk_0\eta_0 J_z$	E^{inc}
TE	H_z	ε_r	μ_r	$jk_0/\eta_0 M_z$	H^{inc}

el problema empleando FEM es mejor convertirla en una formulación variacional que escrita de forma compacta queda

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \phi \in \mathbf{V} \\ b(\phi, \omega) = f(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbf{V}, \end{cases} \quad (1)$$

donde \mathbf{V} es el espacio de Hilbert de soluciones admisibles que corresponde con el espacio de Sobolev de primer orden sobre el dominio del problema FEM (Ω) limitado por la frontera S .

$$\mathbf{V} := \left\{ \phi : \int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 + |\phi|^2) dS < \infty \right\} \quad (2)$$

La forma bilineal $b(\phi, \omega)$ es

$$b(\phi, \omega) = \iint_{\Omega} \nabla_t w \cdot [f_r^{-1} \nabla_t \phi] dS - k_0^2 g_r \iint_{\Omega} w \phi dS + j k_0 f_r^{-1} \int_{\Gamma_S} w \phi dl + j \beta_i \int_{\Gamma_i} w \phi dl \quad (3)$$

y la forma lineal $f(\omega)$

$$f(\omega) = - \iint_{\Omega} w q dS + \int_S w \Psi dl + 2 j \beta_i \int_{\Gamma_i} w \phi_i^{inc} dl \quad (4)$$

donde la definición de ϕ , g_r , f_r y q se da en la tabla I en función del tipo de la polarización. β_i es la constante de propagación en la guíaonda monomodo “i” cuya puerta se encuentra en Γ_i y la función residual $\Psi(\vec{r})$ se obtiene mediante el método iterativo descrito en [3]. En este artículo se presentan problemas de dispersión excitados por ondas planas y problemas de radiación mediante bocinas, en ambos tipo de problemas $q = 0$.

La resolución del problema usando hp -FEM convierte el problema continuo (1) en el problema discreto dado por

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \phi_{hp} \in \mathbf{V}_{hp} \\ b(\phi_{hp}, \omega_{hp}) = f(\omega_{hp}) \quad \forall \omega \in \mathbf{V}_{hp}, \end{cases} \quad (5)$$

donde $\mathbf{V}_{hp} \subset \mathbf{V}$ es el conjunto de soluciones posibles hp

Nosotros asumimos que la cantidad de interés se puede representar por un funcional L que es lineal y continuo. El error en la cantidad de interés ε es

$$\varepsilon = L(\phi) - L(\phi_{hp}) = L(\phi - \phi_{hp}) = L(e) \quad (6)$$

donde $e = \phi - \phi_{hp}$ representa el error del campo. $\varepsilon = b(e, \epsilon)$ siendo $\epsilon = \tau - \tau_{hp}$ el error de discretización de la *función de influencia* (τ) que se obtiene al resolver el problema dual

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \tau \in \mathbf{V} \\ b(\omega, \tau) = L(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbf{V}, \end{cases} \quad (7)$$

Una vez que el error en la cantidad de interés ha sido determinado en términos de la forma bilineal b , nos interesa obtener un cota superior de $|\varepsilon|$ que dependa *localmente* de

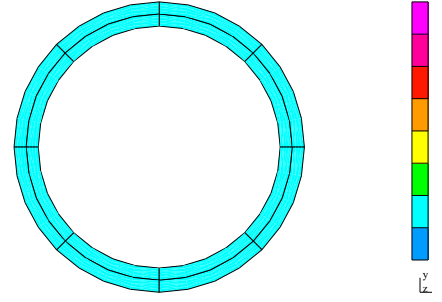


Fig. 1. Malla inicial del problema de scattering de una onda plana sobre un cilindro conductor perfecto.

los parámetros del mallado (tamaño h y orden p de los elementos). Una solución es

$$|\varepsilon| = |L(e)| = |b(e, \epsilon)| \leq \sum_K |b_K(e, \epsilon)| \leq \sum_K \|e\|_K \|\epsilon\|_K \quad (8)$$

donde el índice de sumatorio K indica suma a lo largo de todos los elementos y $\|\cdot\|_K$ denota la norma de la energía aplicada exclusivamente al elemento K . Un desarrollo más detallado de esta metodología orientada a objetivo para problemas cerrados se encuentra en [4].

III. RESULTADOS

El primer problema analizado es el cálculo del campo lejano dispersado (en $\varphi = 90^\circ$) por un cilindro conductor eléctrico cuando sobre él incide una onda plana desde $\varphi^{inc} = 0^\circ$. Se ha elegido este problema porque posee solución analítica. El radio del cilindro es $a = 1\lambda$ y el dominio FEM (Ω) se extiende hasta el cilindro $c = 1.2\lambda$. La frontera auxiliar S' usada mediante el principio de equivalencia para actualizar Ψ y calcular el campo lejano dispersado se encuentran sobre el cilindro $b = 1.1\lambda$. Para este primer problema, el funcional lineal $L(\omega)$ es proporcional a

$$L(\omega) \propto \oint_{S'} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n'} - j k_0 (\hat{r}' \cdot \hat{y}) \omega \right) e^{j k_0 (\vec{r}' \cdot \hat{y})} dl' \quad (9)$$

La geometrías de los problemas y las malla iniciales son definidas por el usuario usando el pre y postprocesador GiD mediante el interfaz descrito en [5]. En particular, la malla inicial para resolver el anterior problema electromagnético se presenta en la figura 1.

En la figura 2 se representa la evolución del error en la cantidad de interés cuando el refinamiento es guiado por la norma de la energía del error en el dominio FEM (etiqueta *hp-Energ*) o por la cota superior de la cantidad de interés (etiqueta *hp-Goal*). Se observa que el número de incógnitas necesarias para obtener un mismo error en la cantidad de interés es notablemente inferior en el segundo caso.

En la figura 3 se representan las mallas obtenidas para que el error en la cantidad de interés sea aproximadamente 0.001% en función del método utilizado para guiar el refinamiento. Los colores indican el orden p usado en cada elemento, el color azul oscuro corresponde con $p = 1$ mientras que el magenta claro corresponde al $p = 8$. En la figura 3(b) se observa como las incógnitas se acumulan principalmente en la región próxima a la frontera auxiliar S' y hacia el

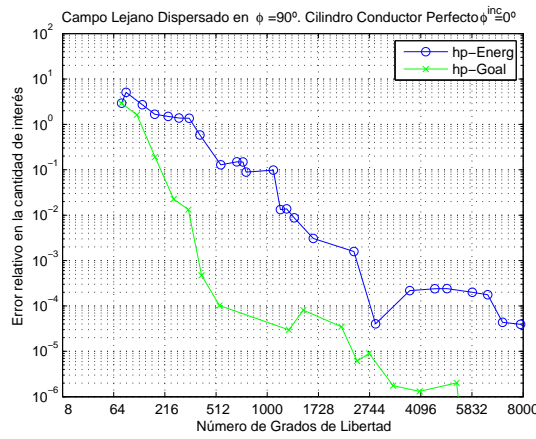
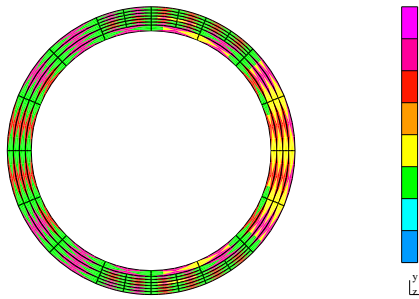
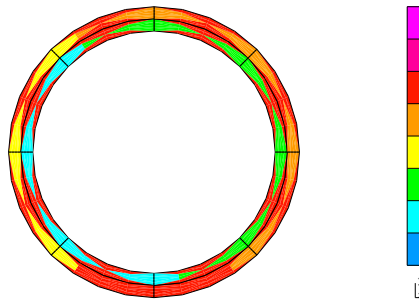


Fig. 2. Convergencia del error en la cantidad de interés (Campo lejano dispersado en $\varphi = 90^\circ$) cuando la adaptabilidad es guiada por la norma de la energía del error en el dominio FEM o por una cota superior de la cantidad de interés. Polarización TM



(a) Adaptabilidad guiada por la norma de la energía del error en el dominio FEM. Iteración 17.



(b) Adaptabilidad guiada por una cota superior de la cantidad de interés. Iteración 5.

Fig. 3. Mallas obtenidas para un error relativo en la cantidad de interés (campo lejano dispersado por un cilindro conductor perfecto en $\varphi = 90^\circ$ con $\varphi^{\text{inc}} = 0^\circ$ cuando la polarización es TM) de $\epsilon \approx 0.001\%$.

exterior, está es la región utilizada para calcular el campo lejano. Aunque los resultados presentados corresponden a una polarización *TM* resultados muy similares fueron obtenidos para la polarización *TE*.

El segundo problema analizado es el cálculo del coeficiente de acoplamiento entre dos bocinas (S_{21}) que forman un array (ver figura 4). Para la computación del coeficiente de acoplamiento se puede truncar el problema más cerca de las

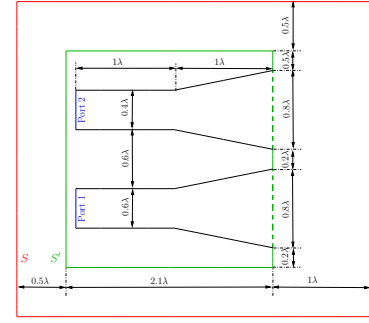


Fig. 4. Geometría del problema de dos bocinas acopladas

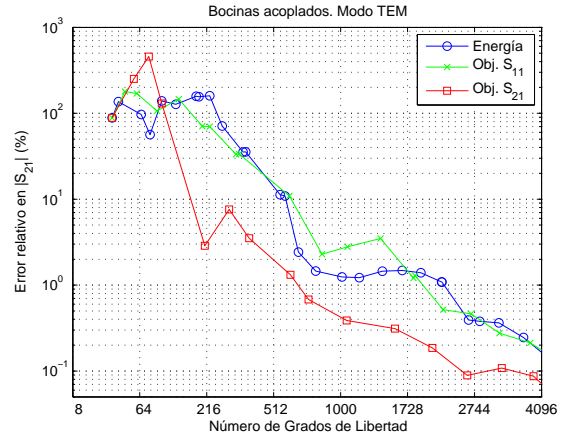


Fig. 5. Convergencia del error en la cantidad de interés (S_{21}) cuando el refinamiento lo guía la energía del error en el dominio FEM, y los funcionales lineales S_{21} y $S_{11} + 1$

fuentes² pero se ha preferido alejarla para observar los campos radiados por las guíaondas. En este segundo problema, el funcional lineal $L(\omega)$ es es proporcional a

$$L(\omega) \propto \int_S w \Psi dl + 2j\beta_2 \int_{\Gamma_2} w \phi_2^{\text{inc}} dl \quad (10)$$

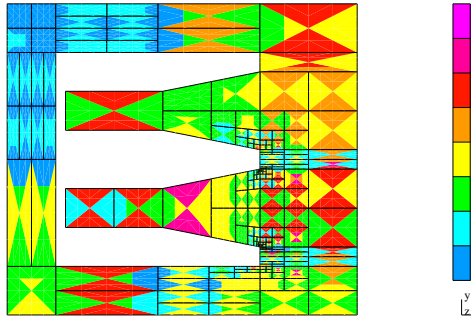
donde ϕ_2^{inc} es el campo incidente sobre la segunda puerta.

En la figura 5 se representa la evolución del error en la cantidad de interés (S_{21}) cuando las mallas son obtenidas para minimizar la energía del error en el dominio FEM (etiqueta *Energía*), la cota de la cantidad de interés S_{11} ³ (etiqueta *Obj. S₁₁*) y la cota de la cantidad de interés S_{21} (etiqueta *Obj. S₂₁*). Si la cantidad de interés es S_{21} , el número de incógnitas necesarias para obtener un mismo error es inferior cuando el refinamiento lo guía la cota superior de la cantidad de interés. La coincidencia entre la convergencia entre las curvas *Energía* y *Obj. S₁₁* se debe a la coincidencia entre el problema original y el dual, véase (4) y (10).

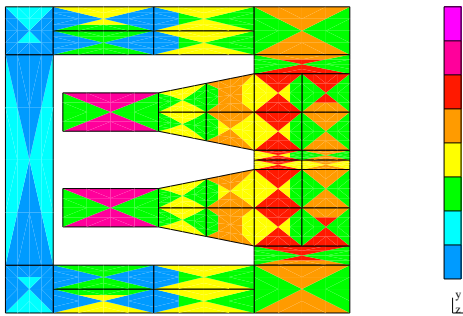
En la figura 6 se representan las mallas obtenidas para que el error en la cantidad de interés sea $S_{21} \approx 1\%$. Nótese que la malla representada en la figura 6(b) es simétrica ya que el problema dual es simétrico al problema original; el problema dual lo excita la segunda bocina mientras que el original lo excita primera bocina, véase (10) y (4). Por contra, en la figura 6(a) se observa como las incógnitas se concentran en

²Se ha resuelto el mismo problema situando la frontera S a 0.2λ de la estructura metálica y los resultados obtenidos han sido muy similares

³El coeficiente de reflexión no es un funcional lineal pero sí lo es $S_{11} + 1$



(a) Adaptabilidad guiada por la norma de la energía del error en el dominio FEM. Iteración 21.



(b) Adaptabilidad guiada por una cota superior del error de la cantidad de interés. Iteración 7.

Fig. 6. Mallas obtenidas para un error relativo en la cantidad de interés (coeficiente de acoplamiento entre bocinas S_{21}). Ambas mallas corresponden a un error de $\epsilon \simeq 1\%$

la región donde el campo radiado por la primera bocina son más intensos.

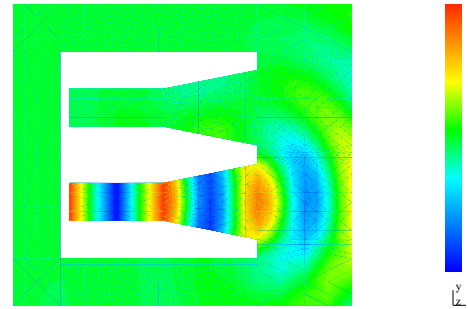
La solución del problema original y del problema dual para un error en la cantidad de interés de $\simeq 1\%$ se muestran en la figura 7. Obsérvese la simetría existente entre ambas soluciones lo que lleva a que la malla obtenida (figura 6(b)) sea también simétrica. La solución de campo obtenida cuando el refinamiento lo guía la norma de la energía del error es muy similar (evidentemente con mayor precisión) a la que se representa en la figura 7(a) y no se presenta por falta de espacio.

IV. CONCLUSIONES

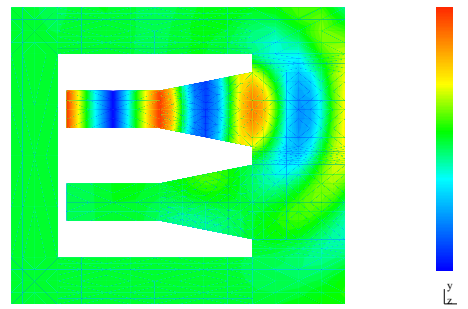
Se ha presentado un método de elementos finitos *hp* con adaptabilidad automática adaptada a objetivo para problema abiertos en 2D. Los resultados numéricos obtenidos muestran que el método presenta convergencia exponencial en la cota superior de la cantidad de interés. Además, para una tolerancia prefijada en la cantidad de interés el número de incógnitas necesarias para resolver el problema es notablemente inferior cuando la adaptabilidad la guía una cota superior de la cantidad de interés que cuando la guía la norma de la energía del error en el dominio FEM.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación recibida por parte del Ministerio de Educación y Ciencia en



(a) Problema Original. Rango desde -1.607 a 1.624



(b) Problema Dual. Rango desde -1.607 a 1.624

Fig. 7. Parte real de la soluciones obtenidas cuando la adaptabilidad la guía el parámetro S_{21} . El error en la cantidad de interés es de $\epsilon \simeq 1\%$ y la solución corresponde a la séptima iteración.

el proyecto TEC2007-65214/TCM.

Also, this material is based on research sponsored by the Air Force Research Laboratory, under agreement number FA8655-07-1-3041. The U.S. Government is authorized to reproduce and distribute reprints for Governmental purposes notwithstanding any copyright notation thereon. The views and conclusions contained herein are those of the authors and should not be interpreted as necessarily representing the official policies or endorsements, either expressed or implied, of the Air Force Research Laboratory or the U.S. Government.

REFERENCES

- [1] M. Salazar-Palma, T. K. Sarkar, L. E. García-Castillo, T. Roy, and A. R. Djordjevic, *Iterative and Self-Adaptive Finite-Elements in Electromagnetic Modeling*. Norwood, MA: Artech House Publishers, Inc., 1998.
- [2] L. Demkowicz, *Computing with *hp* Finite Elements. I. One- and Two-Dimensional Elliptic and Maxwell Problems*. Chapman & Hall/CRC Press, Taylor and Francis, Oct. 2006.
- [3] I. Gómez-Revuelto, L. E. García-Castillo, D. Pardo, and L. F. Demkowicz, "A two-dimensional self-adaptive *hp* finite element method for the analysis of open region problems in electromagnetics," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 43, no. 4, pp. 1337–1340, Apr. 2007.
- [4] L. E. García-Castillo, D. Pardo, L. F. Demkowicz, and C. Torres-Verdín, "A two-dimensional self-adaptive *hp*-adaptive finite element method for the characterization of waveguide discontinuities. Part II: Goal-oriented *hp*-adaptivity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, no. 49–52, pp. 4811–4822, Nov. 2007, doi:10.1016/j.cma.2007.06.023.
- [5] D. García-Doñoro, L. E. García-Castillo, and I. Gómez-Revuelto, "An interface for an *hp*-adaptive finite element package using GiD," in *GID 2008. 4th Conference on Advances and Applications of GiD*, ser. Monograph CIMNE, Ibiza, Spain, May 2008.